

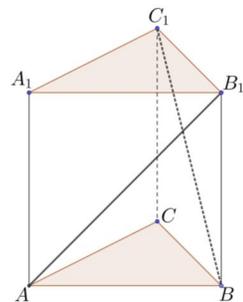
臺北市立建國高級中學 115 學年度第 1 次正式教師甄選 數學科題目卷

一、填充題（每題 6 分，共計 72 分）

1. 已知 z, w 皆為非零複數，且滿足 $|z-2w|=3$ ， $\frac{z}{w}$ 的主幅角為 $\frac{\pi}{3}$ ，則 $|z|+|w|$ 的最大值為_____。
2. 已知 x, y 皆為正實數，且滿足 $x^3+y^3+3xy=1$ ，則 x^2y 的最大值為_____。
3. 已知數列 $\{a_n\}$ 滿足 $a_1=1, a_2=5$ ，且 $\frac{a_{n+2}+a_n}{a_{n+1}+2}=2$ ，則 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}+\dots+\sqrt{a_n}}{n^2}$ 的值為_____。
4. 已知 $\triangle ABC$ 中， $\angle A, \angle B, \angle C$ 所對應的邊分別為 a, b, c ，且 $c=5$ ， $\frac{\cos A}{\cos B}=\frac{b}{a}=\frac{4}{3}$ 。點 P 為 $\triangle ABC$ 內切圓上的動點， d 為點 P 到頂點 A, B, C 距離的平方和，令 d 的最小值與最大值分別為 d_{\min}, d_{\max} ，則 $d_{\min}+d_{\max}$ 的值為_____。
5. 已知 z 為複數，且 $\frac{z+1}{z-1}$ 是純虛數，則 $|z^2-2z+3|$ 的最小值為_____。
6. 已知 $3^{2^{2026}}-1=2^n \cdot m$ ，且 m 為奇數，則正整數 n 為_____。
7. 在一個 2×7 的格子內填入數字 $a_{i,j} \in \{1, 2, 3\}$ ，使其滿足 $a_{i,j} \leq a_{i+1,j}$ 且 $a_{i,j} \leq a_{i,j+1}$ ，則相異的填法數共有_____種。

$a_{1,1}$	$a_{1,2}$	$a_{1,3}$	$a_{1,4}$	$a_{1,5}$	$a_{1,6}$	$a_{1,7}$
$a_{2,1}$	$a_{2,2}$	$a_{2,3}$	$a_{2,4}$	$a_{2,5}$	$a_{2,6}$	$a_{2,7}$

8. 已知 $a \in \mathbb{R}$ ，且對所有 $k \in [-1, 1]$ ，當 $x \in (0, 4]$ 時， $5 \ln x + x^2 - 8x + a \leq kx$ 恆成立，則 a 的最大值為_____。
($1.386 < \ln 4 < 1.387$)
9. 令 $[x]$ 表示「小於或等於實數 x 的最大整數」，則滿足 $x \cdot [x \cdot [x \cdot [x]]] = 114$ 的所有實數 x 為_____。
10. 設 $x \geq 1$ ，若函數 $f(x) = x^2 - 2x - 2 - 16\sqrt{x-1} + x\sqrt{x^2 - 4x - 32\sqrt{x-1} + 76}$ 在 $x = x_0$ 時有最小值 m ，則實數對 (x_0, m) 為_____。
11. 箱子中有 13 顆球，編號分別為 $1, 2, 3, \dots, 13$ ，現從中隨機取出三顆相異的球，並觀察其編號，假設箱子中的每顆球被取到的機會均等。已知這三顆球編號的乘積為 a ，這三顆球編號的總和為 b ，則 a 或 b 為完全平方數的機率為_____。
12. 給定一個正三稜柱 $ABC-A_1B_1C_1$ ，其中 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A_1B_1C_1$ 皆為正三角形，側面皆為正方形，且所有稜長皆為 1，則兩直線 $\overline{AB_1}$ 和 $\overline{C_1B}$ 的距離為_____。



二、計算題（各題配分列於題後，全部 2 大題，共計 28 分）

1. 設 x 為實數，若函數 $f(x) = |x-1| + a \cdot |x-b| + 3 \cdot |x-115|$ ，其中 a, b 皆為整數且 $1 < b < 115$ ，已知 $f(x)$ 的最小值為 12，請回答下列各小題。
 - (1) 試證： $a < 0$ 。（4 分）
 - (2) 試求所有滿足題目條件的數對 (a, b) 。（10 分）
2. 已知 $p > 3$ ，且 p 為質數，若 $\sum_{n=3}^{p-1} \frac{n^3}{(n-1)(n-2)} = \frac{b}{a}$ ，其中 a, b 互質，試證： p 為 b 的因數。（14 分）

臺北市立建國高級中學 115 學年度第 1 次正式教師甄選 數學科參考答案

一、填充題（每題 6 分，共計 72 分）

題號	1	2	3	4
答案	$\sqrt{21}$	$\frac{4}{27}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	40
題號	5	6	7	8
答案	$\frac{2}{3}\sqrt{6}$	2028	540	$12-10\ln 2$
題號	9	10	11	12
答案	$\frac{-114}{37}$	$\left(\frac{17+\sqrt{17}}{8}, -6\right)$	$\frac{45}{286}$	$\frac{\sqrt{5}}{5}$

二、計算題（各題配分列於題後，全部 2 大題，共計 28 分）

題號	1	
	(1)	(2)
答案	略	$(a, b) = (-1, 13), (-2, 64), (-3, 81), (-3, 111)$
題號	2	
答案	略	